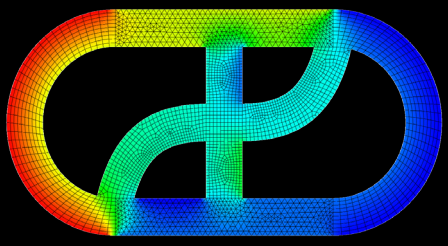


CFD EXPERTS

Simulate the Future

WWW.CFDEXPERTS.NET

مجموعه مقاله‌های آموزشی

شماره ۸

روش‌های کلی گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال

General Methods for Discretization of Fluid Flow Governing Equations

نویسنده

جواد سپاهی یونسی

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

چکیده

برای شبیه‌سازی جریان با استفاده از CFD، بعد از تولید هندسه، تولید مش و انتخاب معادلات حاکم باید این معادلات را گسسته کرد. سه روش کلی برای این کار روش تفاضل محدود (FDM)، روش حجم محدود (FVM) و روش المان محدود (FEM) است که در این مقاله مختصرا معرفی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی

دینامیک سیالات محاسباتی یا CFD، روش تفاضل محدود، روش حجم محدود، روش المان محدود

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

فهرست مطالب

صفحه

۸ روش‌های کلی گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال ۵
۱.۸ روش تفاضل محدود (FDM : Finite-difference Method) ۵
۲.۸ روش حجم محدود (FVM : Finite-volume Method) ٦
۳.۸ روش المان محدود (FEM : Finite-element Method) ۷
۴.۸ سایر روش‌های گسسته‌سازی ۹
۵.۸ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ۹
منابع و مراجع ۱۰

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

۸ روش‌های کلی گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال

معادلات حاکم بر جریان سیال در این مقاله معرفی شده‌اند. در CFD این معادلات در شبکه محاسباتی گسسته‌سازی و حل می‌شوند. در این مقاله روش‌های کلی گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال معرفی می‌شوند.

۱.۸ روش تفاضل محدود (FDM: Finite-difference Method)

این روش که اولین روش مورد استفاده برای حل عددی معادلات دیفرانسیل بوده است، اولین بار توسط اویلر (Euler) (احتمالا در سال ۱۷۶۸ میلادی) استفاده شده است [۱]. در روش تفاضل محدود از فرم دیفرانسیلی معادلات حاکم بر جریان سیال استفاده می‌شود. اساس این روش استفاده از بسط تیلور برای گسسته‌سازی مشتق‌های متغیرهای جریان موجود در معادلات حاکم است. به‌عنوان مثال مشتق مرتبه اول $\partial U/\partial x$ در نقطه x_0 به‌صورت زیر گسسته و تقریب زده می‌شود:

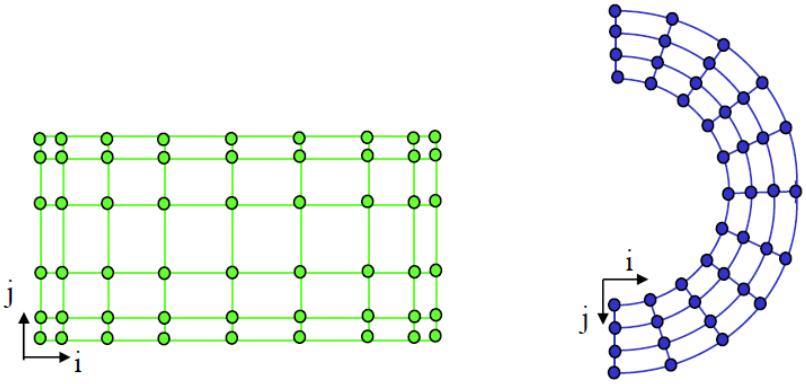
$$U(x_0+\Delta x) = U(x_0) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_0} + \cdots$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_0} = \frac{U(x_0+\Delta x) - U(x_0)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

دقت تقریب بالا از مرتبه ۱ است، $O(\Delta x)$. به‌صورت مشابه می‌توان مراتب دقت بالاتر برای مشتق مرتبه اول و نیز مشتق‌های مراتب بالاتر را تقریب زد.

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

یکی از امتیازات مهم روش تفاضل محدود سادگی آن است. ولی ازآنجاکه این روش نیاز به یک شبکه باسازمان (Structured Grid) دارد، دامنه کاربرد آن محدود است، زیرا استفاده از این شبکه در هندسه‌های واقعی که عموما پیچیده هستند، مشکل است. برای آشنایی با شبکه باسازمان به این مقاله مراجعه کنید.

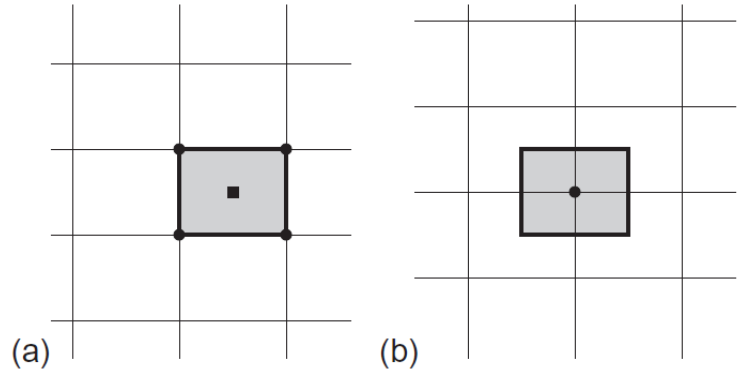


دو نمونه شبکه باسازمان برای استفاده در FDM [۲]

۲.۸ روش حجم محدود (FVM: Finite-volume Method)

در این روش برای گسسته‌سازی از قوانین بقا و فرم انتگرالی معادلات حاکم استفاده می‌شود. در حقیقت در این روش معادلات بقا در هر یک از سلول‌های میدان حل اعمال می‌شوند. اگر گفته شود روش تفاضل محدود با گره‌های (Nodes) شبکه کار می‌کند، روش حجم محدود با سلول‌های شبکه سروکار دارد و هر سلول را یک حجم کنترل (Control Volume) برای اعمال قوانین بقا می‌بینند. البته انتخاب سلول‌های شبکه برای اعمال قوانین بقا یکی از انتخاب‌ها است که به آن اصطلاحا Cell-centered scheme می‌گویند. در Cell-centered scheme کمیت‌های جریان در مرکز هر سلول شبکه ذخیره و حجم‌های کنترل همان سلول‌های شبکه در نظر گرفته می‌شوند. در مقابل Cell-vertex scheme وجود دارد که در آن کمیت‌های جریان در نقاط شبکه ذخیره می‌شوند. در این روش حجم کنترل می‌تواند اجتماع تمام سلول‌های شبکه که در هر گره مشترک هستند، باشد که به آن حجم کنترل Overlapping می‌گویند و یا می‌تواند حجمی باشد که گره شبکه در مرکز آن قرار گیرد که به این حالت حجم کنترل Dual گفته می‌شود.

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.



(a): حجم کنترل روش Cell-centered، (b): حجم کنترل روش Cell-vertex (Dual)

مزیت روش حجم محدود این است که به‌راحتی می‌توان از آن هم در شبکه باسازمان و هم در شبکه بی‌سازمان (Unstructured Grid) استفاده کرد. امروزه این روش به‌صورت گسترده استفاده می‌شود [۱].

۳.۸ روش المان محدود (FEM: Finite-element Method)

این روش که ابتدا فقط برای تحلیل‌های سازه‌ای استفاده می‌شد، در سال ۱۹۵۶ میلادی توسط Turner و همکارانش معرفی شد. در اوایل دهه ۱۹۹۰ میلادی بود که از این روش به‌صورت گسترده برای حل مسائل سیالات استفاده شد. برای استفاده از این روش شبکه باید بی‌سازمان باشد.

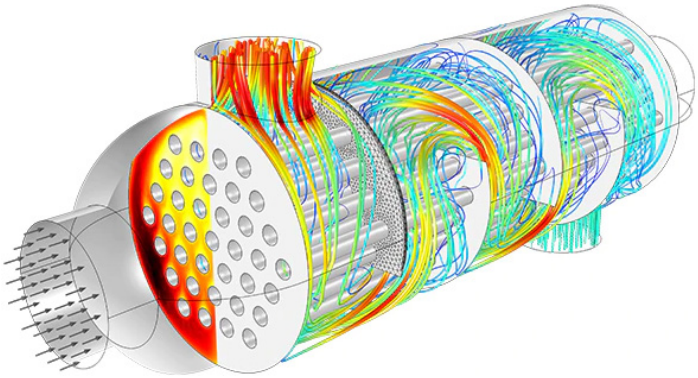
در این روش با توجه به نوع المان‌ها (سلول‌های) شبکه و دقت مورد نیاز، تعداد مشخصی نقطه که در آن‌ها مشخصات جریان باید محاسبه شود، روی مرزها و/یا داخل المان‌ها در نظر گرفته می‌شود. تعداد کل نقاط ضرب‌در تعداد مجهولات، تعداد درجات آزادی مسئله را مشخص می‌کند. علاوه بر این یک سری Shape Function که تغییرات حل داخل هر المان را نشان می‌دهند، باید تعریف شود. این Shape Functionها خطی یا از درجات بالاتر هستند و مقدارشان خارج از المان مورد نظر صفر است.

برای استفاده از روش المان محدود، معادلات حاکم بر جریان باید از فرم دیفرانسیلی به یک فرم انتگرالی معادل تبدیل شوند. جذابیت این روش به خاطر همین فرم انتگرالی و استفاده از شبکه بی‌سازمان است که

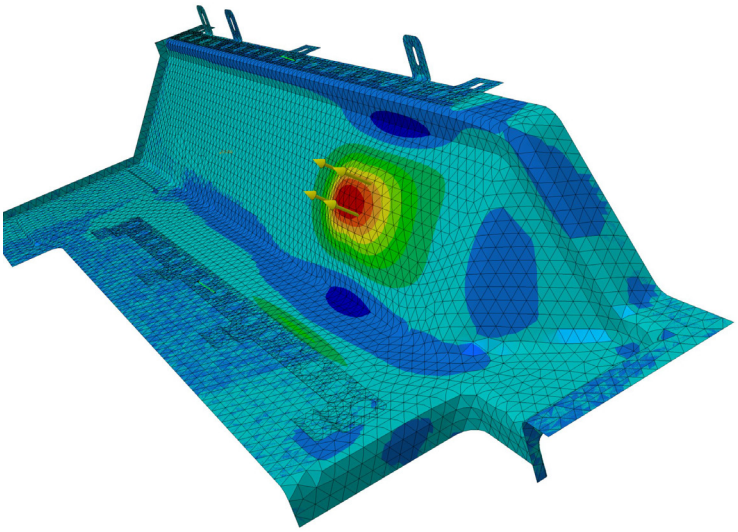
تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

هر دوی این موارد این روش را برای استفاده در هندسه‌های پیچیده مناسب می‌کند. مبنای ریاضی روش المان محدود بسیار پیچیده است و در مقایسه با روش حجم محدود، هزینه عددی بیش‌تری دارد [۱].

از مزیت‌های دیگر FEM می‌توان به این اشاره کرد که در شبکه‌های درشت بیش‌ترین دقت را دارد و برای مسائل لزجی که در آن‌ها Diffusion غالب است و نیز در مسائل لزج سطح آزاد (Free Surface) عملکرد بسیار مطلوبی دارد. اشکال آن هم این است که در مسائل بزرگ کند است و برای جریان‌های آشفته به‌خوبی توسعه نیافته است [۲].



حل جریان در یک مبدل حرارتی با استفاده از FEM



تحلیل سازه‌ای با استفاده از FEM

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

۴.۸ سایر روش‌های گسسته‌سازی

در کنار روش‌های بالا، در موارد خاص می‌توان برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال از Spectral-element Method، Lattice Boltzmann Method و Gridless Method استفاده کرد که برای آشنایی بیش‌تر با آن‌ها مطالعه مرجع [۱] و یا سایر منابع مرتبط توصیه می‌شود.

۵.۸ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

سه روش اصلی برای گسسته‌سازی معادلات حاکم FDM، FVM و FEM هستند. تقریبا ۸۰ درصد برنامه‌های تجاری CFD از FVM، ۱۵ درصد از FEM و ۵ درصد از سایر روش‌ها استفاده می‌کنند. مزیت FDM سادگی آن و اشکال آن این است که محدود به شبکه‌های ساده است. روش المان محدود مبنای ریاضی بسیار پیچیده‌ای دارد و بیش‌تر برای تحلیل سازه‌ای استفاده می‌شود. برای کدها و نرم‌افزارهای صنعتی FVM پیشنهاد می‌شود، زیرا در اکثر مسائل دقت قابل قبولی دارد، هزینه محاسباتی آن مقرون‌به‌صرفه است و در تمام شبکه‌ها قابل استفاده است.

نظرات خود را در مورد این مقاله با ما در میان بگذارید.

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.

منابع و مراجع

[۱] J. Blazek, "Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications", 3rd Ed., Elsevier, 2015.

[۲] André Bakker, "Applied Computational Fluid Dynamics", a Course at Dartmouth College, 2002-2006.

تمام حقوق برای سایت WWW.CFDEXPERTS.NET محفوظ است.