CFD EXPERTS

Simulate the Future

WWW.CFDEXPERTS.NET

مجموعه مقاله‌های آموزشی

شماره ۶

نوشتار اندیسی

Index Notation

نویسنده

جواد سپاهی یونسی

چکیده

انتخاب و گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان از مهم‌ترین مراحل شبیه‌سازی CFD است. برای شناخت صحیح معادلات حاکم لازم است با نوشتار اندیسی آشنا باشید، چرا که اکثر مراجع از این نوشتار برای معرفی معادلات حاکم استفاده می‌کنند. این نوشتار باعث اختصار معادلات حاکم و فهم عمیق‌تری از جملات مختلف آن‌ها می‌شود. معرفی انواع اندیس (Index)، ضرب داخلی و خارجی بردارهای یکه، اپراتورهای دیفرانسیلی گرادیان، دیورژانس و کرل (Curl) و در نهایت انواع ضرب بردارها و تانسورها از مطالب این مقاله است.

واژه‌های کلیدی

دینامیک سیالات محاسباتی یا CFD، معادلات حاکم بر جریان، اندیس آزاد، اندیس میرا، تانسور، ضرب داخلی، ضرب خارجی، ضرب نقطه‌ای دوگانه

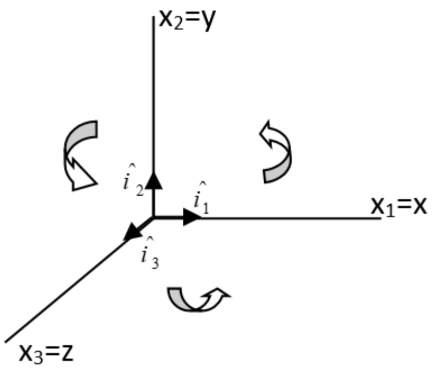
فهرست مطالب

صفحه

۶ نوشتار اندیسی

نوشتار اندیسی یا تانسوری (Tensor Notation) باعث سادگی و اختصار محاسبات در هر دستگاه مختصات می‌شود. بسیاری از کتاب‌ها و مراجع و حتی قسمت Help نرم‌افزارهایی چون فلوئنت بر اساس این نوشتار هستند. قبل از مطالعه معادلات حاکم بر جریان لازم است نوشتار اندیسی فراگرفته شود، زیرا در بسیاری از جملات این معادلات از این نوشتار استفاده می‌شود و بدون این نوشتار فهم قسمت‌های زیادی از معادلات ناقص خواهد بود.

در نوشتار اندیسی در حالت کلی دستگاه مختصات و بردار پایه آن به‌صورت زیر است:



$$base\ vector = (\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$$

دستگاه مختصات در حالت کلی

که در مختصات کارتزین:

$$\begin{cases} \hat{i}_1 = (1,0,0) \\ \hat{i}_2 = (0,1,0) \\ \hat{i}_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

در این نوشتار هر کمیت یک تانسور با مرتبه مشخص است:

- Zero Order Tensor → Scalar → فقط مقدار دارد
- 1st Order Tensor → Vector → مقدار و یک جهت دارد
- 2nd Order Tensor → Tensor → مقدار و دو جهت دارد

۱.۶ معرفی اندیس‌های میرا و آزاد

فرض کنید $\vec{r}$ یک بردار دلخواه مثلا بردار موقعیت باشد:

$$\vec{r} = x_1\hat{i}_1 + x_2\hat{i}_2 + x_3\hat{i}_3 = x_k\hat{i}_k;\ \ k = 1,2,3$$

در عبارت بالا k اندیس میرا (Dummy Index) و معرف جمع است و هر اندیسی غیر آن هم باشد، معنای آن همین خواهد بود:

$$\vec{r} = x_m\hat{i}_m;\ \ \ m = 1,2,3$$

نشانه این اندیس این است که دو بار در عبارت ظاهر می‌شود. در عبارات بالا معنای ویرگول بین اعداد ۱، ۲ و ۳ «و» است.

در مقابل اندیس میرا اندیس آزاد (Free Index) وجود دارد که یک بار در عبارت ظاهر می‌شود، معرف مؤلفه است و ویرگول بین اعداد ۱، ۲ و ۳ در آن معنای «یا» می‌دهد:

$$x_k;\ k = 1,2,3 \rightarrow x_1\ or\ x_2\ or\ x_3$$

به اندیس میرا Einstein Summation Index هم می‌گویند:

$$A_kB_k = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = A_mB_m; m,\ k = Dummy\ Index = 1,2,3$$

با استفاده از این دو اندیس، مشتق یک کمیت را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد:

- اگر P یک کمیت اسکالر باشد، $\frac{\partial P}{\partial x_k}$ با $P_{,k}$ نشان داده‌می‌شود و معنای آن مشتق P در جهت x_k است که بسته به k جهت معلوم می‌شود.

$$P_{,1}=\frac{\partial P}{\partial x_1}\overset{Cartesian}{=}\frac{\partial P}{\partial x}\ \&\ P_{,2}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=\frac{\partial P}{\partial y}\ \&\ P_{,3}=\frac{\partial P}{\partial x_3}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

- اگر به‌عنوان مثال $\vec{V}$ بردار سرعت جریان باشد:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=V_{k,k}=V_{m,m}=a\ scalar=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=V_{1,1}+V_{2,2}+V_{3,3}$$

$$\overset{Cartesian}{=}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\vec{\nabla}.\vec{V}\overset{for\ incomp.flow}{=}0\Rightarrow V_{k,k,}=0$$

۲.۶ حاصل‌ضرب داخلی بردارهای یکه

از قبل می‌دانیم:

$$\hat{i}_1.\hat{i}_1=1\ and\ \hat{i}_1.\hat{i}_2=0\Rightarrow \hat{i}_m.\hat{i}_n=\begin{cases}1; & m=n\\ 0; & m\neq n\end{cases}$$

چون n و m هر کدام یک بار تکرار شده‌اند، اندیس آزاد هستند. هر کدام سه مقدار می‌توانند داشته باشند، m, n = 1, 2, 3، بنابراین $\hat{i}_m.\hat{i}_n$، ۹ جزء یا حالت دارد:

$$\hat{i}_m.\hat{i}_n=\delta_{mn}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

در عبارت بالا δ_{mn} یک تانسور مرتبه ۲ است که Kronecker Delta نام دارد و در حقیقت Unit Tensor است.

مثال: حاصل $\delta_{mn}u_n$ را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا نوع اندیس‌ها را تشخیص می‌دهیم. اندیس m یک بار تکرار شده بنابراین آزاد و اندیس n دو بار تکرار شده است و میرا است.

$$\delta_{mn}\, u_n = \delta_{m1}\, u_1 + \delta_{m2}\, u_2 + \delta_{m3}\, u_3 ; m = 1,2,3 \Rightarrow$$

$$\delta_{mn} u_n = \begin{cases} \delta_{11}u_1 + \delta_{12}u_2 + \delta_{13}u_3 = u_1 \\ \qquad or \\ \delta_{21}u_1 + \delta_{22}u_2 + \delta_{23}u_3 = u_2 \Rightarrow \\ \qquad or \\ \delta_{31}u_1 + \delta_{32}u_2 + \delta_{33}u_3 = u_3 \end{cases}$$

$$\delta_{mn} u_n = u_m ; m = 1,2,3$$

راه‌حل ساده‌تر مثال بالا این است که بگوییم δ_{mn} تنها در صورتی صفر نیست که m=n باشد، بنابراین در کل عبارت قرار می‌دهیم m=n که باعث می‌شود $\delta_{mm}=1$.

۳.۶ حاصل‌ضرب خارجی بردارهای یکه

دوباره از قبل می‌دانیم:

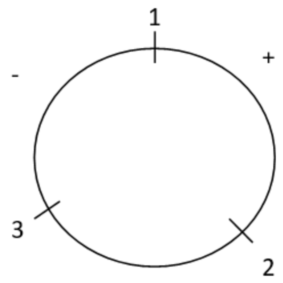
$$\hat{i}_1 \times \hat{i}_2 = \hat{i}_3 , \hat{i}_1 \times \hat{i}_1 = 0 , \hat{i}_2 \times \hat{i}_1 = -\hat{i}_3$$

در حالت کلی:

$$\hat{i}_k \times \hat{i}_m = \varepsilon_{kmn}\, \hat{i}_n$$

در عبارت بالا اندیس‌های k و m آزاد و اندیس n میرا است. حاصل طبق انتظار یک بردار است، زیرا **یک** بردار یکه دارد. نام ε_{kmn}، Paramutation or Alternative Tensor است. این تانسور 3^3=27 حالت دارد. برای یافتن مقدار آن از قرارداد زیر استفاده می‌شود:

$$\varepsilon_{kmn} = \begin{cases} 1 \rightarrow & \text{متمایز بودن اندیس‌ها و چرخش ساعت‌گرد در شکل سمت راست} \\ -1 \rightarrow & \text{متمایز بودن اندیس‌ها و چرخش پادساعت‌گرد در شکل سمت راست} \\ 0 \rightarrow & \text{برابری دو اندیس} \end{cases}$$



به‌عنوان مثال:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,\ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1,\ \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \ldots = 0$$

مثال: حاصل $\hat{i}_1 \times \hat{i}_2$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\hat{i}_1 \times \hat{i}_2 = \varepsilon_{12n}\hat{i}_n = \varepsilon_{121}\hat{i}_1 + \varepsilon_{122}\hat{i}_2 + \varepsilon_{123}\hat{i}_3 = \hat{i}_3$$

۴.۶ ضرب داخلی دو بردار

اگر u و v دو بردار دلخواه باشند:

$$\underline{u}.\underline{v} = u_m\hat{i}_m . v_n\hat{i}_n = u_m v_n \hat{i}_m . \hat{i}_n = u_m v_n \delta_{mn}$$

در ادامه به دو روش می‌توان محاسبات را ادامه داد. در روش اول از عبارتی که قبلا اثبات کردیم، استفاده می‌کنیم:

$$\delta_{mn} u_n = u_m; m = 1,2,3 \Rightarrow \underline{u}.\underline{v} = u_m v_n \delta_{mn} = u_m v_m = u_n v_n$$

در روش دوم می‌گوییم δ_{mn} تنها در صورتی صفر نیست که m=n باشد، بنابراین در کل عبارت قرار می‌دهیم m=n که باعث می‌شود $\delta_{mm}=1$:

$$\underline{u}.\underline{v} = u_m v_n \delta_{mn} = u_m v_m = u_n v_n$$

در نتیجه:

$$\underline{u}.\underline{v}=u_m v_m=u_n v_n=u_1 v_1+u_2 v_2+u_3 v_3$$

۵.۶ ضرب خارجی دو بردار

اگر u و v دو بردار دلخواه باشند:

$$\underline{u}\times\underline{v}=u_m\hat{i}_m\times v_n\hat{i}_n=u_m v_n\hat{i}_m\times\hat{i}_n=u_m v_n\varepsilon_{mnk}\hat{i}_k$$

بنابراین حاصل u×v یک بردار است. به‌عنوان مثال مؤلفه اول این بردار می‌شود:

$$(\underline{u}\times\underline{v})_1=u_m v_n\varepsilon_{mn1}=u_2 v_3\varepsilon_{231}+u_3 v_2\varepsilon_{321}=u_2 v_3-u_3 v_2$$

از طرفی از قبل می‌دانیم که ضرب خارجی دو بردار از دترمینان زیر هم قابل محاسبه است:

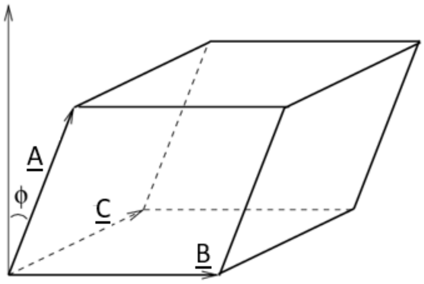
$$\underline{u}\times\underline{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

با استفاده از این روش هم مسلما جواب قبلی به دست می‌آید.

مثال: ثابت کنید:

$$A.(\underline{B}\times\underline{C})=\underline{B}.(\underline{C}\times\underline{A})$$

دقت کنید که $A.(\underline{B}\times\underline{C})$ به Triple Product معروف و معرف حجمی است که سه بردار A، B و C می‌سازند:



حجم ساخته‌شده توسط سه بردار A، B و C

پاسخ:

$$\underline{D}=\underline{B}\times\underline{C}=B_j\hat{i}_j\times C_k\hat{i}_k=B_j\,C_k\varepsilon_{jkm}\hat{i}_m=D_m\hat{i}_m\Rightarrow D_m=B_jC_k\,\varepsilon_{jkm}\ (*)$$

$$\underline{F}=\underline{C}\times\underline{A}=C_k\hat{i}_k\times A_n\hat{i}_n=C_kA_n\varepsilon_{knp}\hat{i}_p=F_p\hat{i}_p\Rightarrow F_p=C_kA_n\varepsilon_{knp}\ \ (**)$$

$$Left\ hand\ side=\underline{A}.\left(\underline{B}\times\underline{C}\right)=\underline{A}.\underline{D}=A_nD_n\overset{(*)}{=}A_nB_jC_k\,\varepsilon_{jkn}=B_j\,(C_kA_n\varepsilon_{jkn})=$$

$$B_j\,(C_kA_n\varepsilon_{knj})=B_p\,(C_kA_n\varepsilon_{knp})\overset{(**)}{=}B_pF_p=\underline{B}.\underline{F}=\underline{B}.\left(\underline{C}\times\underline{A}\right)=Right\ hand\ side$$

۶.۶ معرفی تانسور مرتبه ۲

تانسور مرتبه دوم که مؤلفه‌های آن یک ماتریس ۳ در ۳ تشکیل می‌دهند، از ضرب دیادیک (Dyadic Product) دو بردار حاصل می‌شود:

$$\underline{\underline{T}}=\underline{a}\underline{b}$$

به ضرب دیادیک ضرب تانسوری (Tensor Product) هم می‌گویند و گاهی اوقات این ضرب را با علامت ⊗ نشان می‌دهند. در این ضرب اندیس‌های آزاد دو بردار در هم ضرب نشده و حفظ می‌شوند. ترتیب هم در این ضرب مهم است ($\underline{a}\underline{b}\neq\underline{b}\underline{a}$):

$$\underline{\underline{T}}=(a_m\hat{i}_m)(b_n\hat{i}_n)=\underbrace{a_m b_n}_{component}\underbrace{\hat{i}_m}_{row}\underbrace{\hat{i}_n}_{column}$$

مؤلفه‌های تانسور عبارت‌اند از:

$$T_{mn}=a_m b_n=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

۷.۶ اپراتورهای دیفرانسیلی روی تانسورها

۱.۷.۶ گرادیان (Gradient)

این اپراتور که با علامت $\vec{\nabla}$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla}=grad.=\hat{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\hat{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\hat{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k};k=1,2,3$$

گرادیان یک تانسور مرتبه صفر یا اسکالر یک بردار می‌شود، زیرا:

$$\vec{\nabla}\varphi=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi=\hat{i}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\hat{i}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\hat{i}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\hat{i}_k\varphi_{,k}$$

به همین صورت گرادیان یک بردار یک تانسور مرتبه ۲ می‌شود:

$$\vec{\nabla}\vec{V}=grad\vec{V}=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{V}=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}V_m\hat{i}_m$$

دقت شود که در سیستم مختصات کارتزین، اندازه و جهت بردارهای یکه ثابت است و بنابراین مشتق آن‌ها صفر است. در نتیجه:

$$\vec{\nabla}\vec{V}=\frac{\partial V_m}{\partial x_k}\hat{i}_k\hat{i}_m=V_{m,k}\hat{i}_k\hat{i}_m$$

مؤلفه‌های گرادیان بردار سرعت عبارت‌اند از:

$$\vec{\nabla}\vec{V}=\begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، گرادیان یک مرتبه به مرتبه تانسور می‌افزاید.

۲.۷.۶ دیورژانس (Divergence)

این عمل‌گر همان گرادیان است که تنها ضرب داخلی به سمت راست آن اضافه شده است:

$$\vec{\nabla}.(\,)=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}.(\,\,)$$

به‌عنوان مثال گرادیان یک بردار به‌صورت زیر است:

$$\vec{V}=V_m\hat{i}_m \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{V}=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}.V_m\hat{i}_m=\frac{\partial V_m}{\partial x_k}\hat{i}_k.\hat{i}_m=\frac{\partial V_m}{\partial x_k}\delta_{km}=\frac{\partial V_m}{\partial x_m}=V_{m,m}=V_{k,k}$$

اگر V بردار سرعت در دستگاه کارتزین باشد:

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

برعکس گرادیان، دیورژانس یک مرتبه از مرتبه‌ی تانسور می‌کاهد. به‌عنوان مثال دیورژانس یک تانسور مرتبه ۲ یک بردار می‌شود:

$$\underline{\underline{T}}=T_{mn}\hat{i}_m\hat{i}_n \Rightarrow \vec{\nabla}.\underline{\underline{T}}=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}.T_{mn}\hat{i}_m\hat{i}_n=\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_k}\hat{i}_k.\hat{i}_m\hat{i}_n=\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_k}\delta_{km}\hat{i}_n=\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_m}\hat{i}_n$$

مؤلفه‌های این بردار به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

۳.۷.۶ کرل (Curl)

این عمل‌گر همان گرادیان است که تنها ضرب خارجی به سمت راست آن اضافه شده است:

$$\vec{\nabla}\times(\ )=Curl(\ )=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\times(\ )$$

به‌عنوان مثال حاصل کرل یک بردار، یک بردار به‌صورت زیر است:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=Curl\vec{V}=\hat{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\times V_m\hat{i}_m=\frac{\partial V_m}{\partial x_k}\hat{i}_k\times\hat{i}_m=\frac{\partial V_m}{\partial x_k}\varepsilon_{kmn}\hat{i}_n=\varepsilon_{kmn}V_{m,k}\hat{i}_n$$

با استفاده از مطالبی که ذکر شد، می‌توان اتحادهای زیر و نمونه‌های مشابه آن را اثبات کرد:

1) $Curl(f\vec{A})=\vec{\nabla}\times(f\vec{A})=(\vec{\nabla}f)\times\vec{A}+f(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

2) $\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

3) $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$

4) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

5) $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

۸.۶ ضرب تانسورها و بردارها

با استفاده از مطالب قسمت‌های قبل می‌توان حالات مختلف ضرب داخلی و خارجی بردارها و تانسورها را انجام داد. به‌عنوان مثال:

$$\underline{\underline{T}}.\underline{V}=T_{mn}\hat{i}_m\hat{i}_n.(V_k\hat{i}_k)=T_{mn}V_k\hat{i}_m\hat{i}_n.\hat{i}_k=T_{mn}V_k\hat{i}_m\delta_{nk}\overset{k=n}{=}T_{mn}V_n\hat{i}_m$$

مشاهده می‌شود که حاصل‌ضرب داخلی یک تانسور مرتبه ۲ در یک بردار یک بردار می‌شود. ترتیب ضرب مهم است و این ضرب خاصیت جابه‌جایی ندارد.

ضرب داخلی دو تانسور مرتبه ۲ به‌صورت زیر است:

$$\rightarrow \underline{\underline{S}}.\underline{\underline{T}}=(S_{mn}\hat{i}_m\hat{i}_n).(T_{pq}\hat{i}_p\hat{i}_q)=S_{mn}T_{pq}\hat{i}_m\delta_{np}\hat{i}_q\overset{n\to p}{=}S_{mp}T_{pq}\hat{i}_m\hat{i}_q$$

مشاهده می‌شود که نتیجه ضرب داخلی دو تانسور مرتبه ۲ یک تانسور مرتبه ۲ می‌شود. اگر بخواهیم مشابه ضرب داخلی دو بردار که حاصلش یک اسکالر می‌شود، ضربی داشته باشیم که ضرب دو تانسور مرتبه ۲ با آن یک اسکالر شود باید از ضرب نقطه‌ای دوگانه (Double Dot Product) استفاده کنیم:

$$\underline{\underline{S}}:\underline{\underline{T}}=(S_{mn}\hat{i}_m\hat{i}_n):(T_{pq}\hat{i}_p\hat{i}_q)$$

برای ادامه محاسبه از رابطه گیبس (Gibbs) استفاده می‌شود که به‌صورت زیر است:

$$(\vec{a}\vec{b}):(\vec{c}\vec{d})=(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})$$

در نتیجه:

$$\underline{\underline{S}}:\underline{\underline{T}}=S_{mn}T_{pq}(\hat{i}_m.\hat{i}_p)(\hat{i}_n.\hat{i}_q)=S_{mn}T_{pq}\delta_{mp}\delta_{nq}=\delta_{mn}T_{mn}$$

مشاهده می‌شود که حاصل یک اسکالر است. همه ۹ مؤلفه نظیر به نظیر در هم ضرب و در انتها جمع می‌شوند.

۹.۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

نوشتار اندیسی به‌عنوان لازمه مطالعه و شناخت دقیق معادلات حاکم بر جریان در این مقاله معرفی شد. مفهوم تانسور، ضرب‌های داخلی، خارجی، نقطه‌ای دوگانه و دیادیک به همراه فرم کلی اپراتورهای دیفرانسیلی گرادیان، دیورژانس و کرل در این مقاله مورد بررسی قرار گرفتند. انتظار می‌رود با استفاده از مطالب مورد اشاره در این مقاله بتوانید تفسیر ریاضی درستی از جملات معادلات حاکم داشته باشید.

نظرات خود را در مورد این مقاله با ما در میان بگذارید.

منابع و مراجع

[۱] جزوه درس جریان لزج مقطع کارشناسی ارشد، دکتر کاظم هجران‌فر، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده هوافضا، ۱۳۸۶.